فصلنامه رویکردهای پژوهشی نو در علوم مدیریت
Journal of New Research Approaches in Management Science
سال دوم. شماره یازدهم. بهار ۱۳۹۸، صص ۳۸۱-۳۶۳ Vol 2. No 11. 2019, p 363-381
شماره شاپا (۵۵۶۱-۲۵۸۸) ISSN: (2588-5561)

یکپارچه سازی اولویت‌های ذهنی و اطلاعات عینی با استفاده از روش تصمیم گیری چند معیاره

محمدمهدی جرینی[1]. حامد شاکریان[2]. امامعلی ساعتی قره موسی[3]
۱ و ۲ و ۳. دانشجوی دکتری تخصصی، رشته مدیریت صنعتی، گروه مدیریت، دانشکده علوم انسانی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز، آذربایجان شرقی، ایران
نویسنده مسئول: emamalisaaty@gmail.com

چکیده

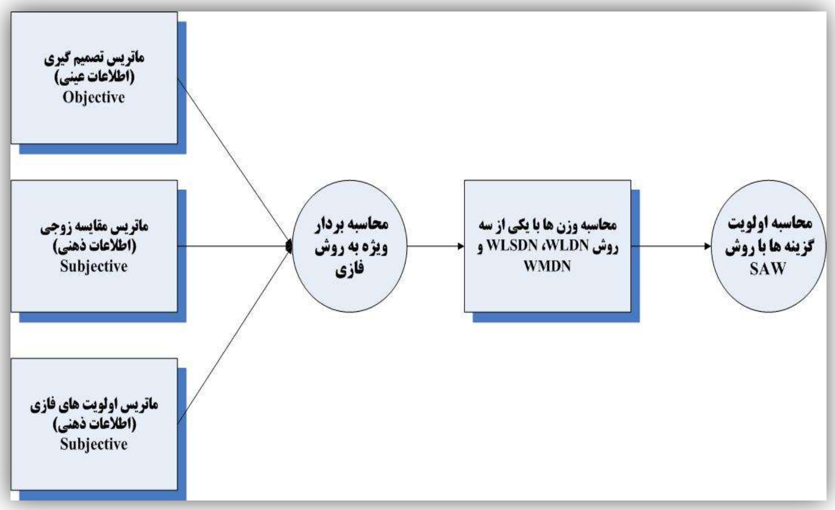
یک روش کلی تصمیم گیری چندشاخصه برای یکپارچه سازی اولویت‌های ذهنی و اطلاعات عینی و نیز برای ارزیابی وزن‌های مرتبط با شاخص‌ها پیشنهاد شده است که اولویت‌های ذهنی هم با اولویت‌های فازی مرتبط با آلترناتیوهای تصمیم و هم با ماتریس مقایسه زوجی وزن‌های مربوط به شاخص‌ها و هم با هر دوی آنها بیان شده و اطلاعات عینی با یک ماتریس تصمیم تشریح شده‌اند. سه حالت خاص از این روش که نرم کمترین خطای موزون(**wldn**)، نرم مربع کمترین خطای موزون(**wlsdn**) و نرم حداقل حداکثر خطای موزون(**wmdn**) می‌باشند، بررسی شده است. تعمیم روش کلی به تصمیم گیری گروهی و انتخاب پارامترهای تصمیم نیز مورد بحث قرار گرفته است. یک مثال عددی نیز برای نشان دادن کاربرد روش‌های پیشنهادی تصمیم گیری چند شاخصه مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: تصمیم گیری چند شاخصه، تصمیم گیری گروهی، ماتریس مقایسه دوطرفه، برآورد وزن

۱. مقدمه

تجزیه و تحلیل تصمیم‌گیری چندشاخصه همیشه دربرگیرنده چندین شاخص تصمیم و چندین آلترناتیو تصمیم است. به منظور گرفتن تصمیم یا انتخاب بهترین آلترناتیو، تصمیم گیرنده اغلب می‌خواهد اولویت‌هایش را هم بر اساس آلترناتیوها و هم بر اساس وزن‌های مربوط به شاخص‌ها و یا بر اساس هر روی آنها اختیار کند. بخصوص در تجزیه و تحلیل تصمیم گیری گروهی، تصمیم توسط چندین تصمیم گیرنده یا کارشناس گرفته می‌شود. بعضی از آنها ترجیح می‌دهند تصمیمهایشان را بر اساس آلترناتیوها و بعضی دیگر بر اساس وزن‌های مرتبط بگیرند. اولویت‌های فازی و ضربی بترتیب دو مفهوم متداول مورد استفاده برای توصیف اولویت‌های ذهنی تصمیم‌گیرنده در آلترناتیوهای تصمیم و در وزن‌های مربوط به شاخص‌ها هستند**[1]**. اولی ماتریس اولویت‌های فازی را در آلترناتیوهای تصمیم تشکیل می‌دهد و دومی ماتریس مقایسه زوجی معروف را بر اساس وزن‌های مربوط به شاخص‌ها شکل می‌دهد. هر دوی آنها می‌توانند برای تخمین وزن‌های مربوط به شاخص‌ها استفاده شوند. زمانیکه وزن‌های مربوط به شاخص‌ها تخمین زده شوند، تصمیم نهایی می‌تواند بر اساس ماتریس تصمیم که تصور می‌شود عینی باشند با استفاده از روش‌های تصمیم گیری چند شاخصه سنتی همچون مجموع ساده وزین یا تاپسیس یا دیگر روش‌ها ساخته شود. در عین حال هیچ ضمانتی نیست که این دو نوع متفاوت از روابط اولویت‌ها به تخمین مشابهی از وزن‌های مربوط به شاخص‌ها دست یابند. گاهی اوقات ممکن است دو تخمین بسیار با یکدیگر ناسازگار باشند**[2]**. از این رو، ترکیب این دو نوع متفاوت از روابط اولویت‌ها با یکدیگر و با اطلاعات عینی ماتریس تصمیم برای دستیابی به یک مدل یکپارچه تصمیم به منظور تضمین یک تخمین کلی برای وزن‌های مربوط به شاخص‌ها. یک تصمیم کلی برای مسئله تصمیم‌گیری چندشاخصه تحت بررسی، بسیار مهم است. ما و دیگران روش جامعی از حالت‌های ذهنی و عینی را ارایه دادند که اولویت‌های ضربی مربوط به شاخص‌ها با یکدیگر ادغام و با اطلاعات ماتریس تصمیم، مدل تصمیم یکپارچه‌ای تشکیل دادند. روش آنها از برنامه‌ریزی درجه دوم غیرخطی برای ارزیابی شاخص‌ها استفاده می‌کرد. فن و دیگران روشی مبتنی بر تصمیم گیری چند شاخصه برای ارتباط اولویت‌های فازی با آلترناتیوهای تصمیم پیشنهاد کردند**[3]**. در روش آنها اولویت‌های فازی مربوط به آلترناتیوها به یکدیگر و با اطلاعات ماتریس تصمیم بصورت یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی درجه دوم یکپارچه شدند. وانگ و پارکان رابطه اولویت‌های فازی را با اطلاعات ماتریس تصمیم در سه سبک متفاوت ترکیب کردند که از تکنیک برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌شد. فن و دیگران نیز آنها را با یکدیگر با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی خطی ترکیب کردند اما با یک مدل یکپارچه متفاوت. بعلاوه آنها یک مدل برنامه‌ریزی خطی و یک مدل بهینه‌سازی دوهدفه برای ادغام روابط اولویت‌های فازی و ضربی با آلترناتیوهای تصمیم ارایه دادند. کاملا واضح است که تاکنون تلاشی برای ترکیب رابطه اولویت‌های فازی آلترناتیوهای تصمیم و رابطه اولویت‌های ضربی وزن‌های مربوط به شاخص‌ها با یکدیگر با اطلاعات ماتریس تصمیم‌گیری برای تشکیل یک مدل جامع تصمیم‌گیری نشده

است[4]. هدف این مقاله ارایه یک مدل کلی برای ترکیب دو نوع روابط اولویت‌ها و اطلاعات ماتریس تصمیم‌گیری برای شکل‌دهی یک مدل است تا بتوان وزن‌های مربوط به شاخص‌ها را با یک روش یکپارچه تخمین زد. باقیمانده مقاله مطابق ذیل سازمان‌دهی شده است: بخش ۲ خلاصه‌ای از روش معروف مجموع ساده وزین برای تصمیم گیری چند شاخصه و روش بردار ویژه برای مدل‌سازی روابط اولویت ذهنی تصمیم‌گیرنده ارایه می‌دهد که مسیر را برای بخش ۳ که یک روش تصمیم گیری چند شاخصه کلی برای ادغام اولویت‌های ذهنی، اطلاعات عینی، و سه حالت خاص به صورت دقیق بررسی شده است، هموار می‌کند. این مطالب با یک مثال عددی که به منظور نشان دادن کاربرد روش‌های پیشنهادی برای مسائل تصمیم گیری چند شاخصه ارایه شده، دنبال می‌شود. مقاله در بخش ۵ جمع‌بندی می‌شود.



شکل ۱ : مدل کلی مقاله

۲. روش مجموع ساده وزین و روش بردار ویژه

۱. ۲. روش مجموع ساده وزین برای تصمیم گیری چند شاخصه

یک مسئله تصمیم گیری چند شاخصه را فرض کنید که $\mathbf{n}$ آلترناتیو تصمیم از $\mathbf{a_1}$ تا $\mathbf{a_n}$ و $\mathbf{m}$ شاخص تصمیم‌گیری از $\mathbf{g_1}$ تا $\mathbf{g_n}$ داشته باشیم. هر گزینه با توجه به $\mathbf{m}$ شاخص که مقادیر ماتریس تصمیم‌گیری $\mathbf{X} = (\mathbf{x_{ij}})_{\mathbf{n\times m}}$ را تشکیل می‌دهند ارزیابی می‌شود. اما این ماتریس نامتقارن است و از این رو ابتدا باید نرمالایز شود[5]. متداول‌ترین روش برای نرمالایز کردن روش فازی است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - x_j^{\min}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j \in \Omega_1,$$

$$z_{ij} = \frac{x_j^{\max} - x_{ij}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j \in \Omega_2,$$

که $x_j^{\min} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{x_{ij}\}, x_j^{\max} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{x_{ij}\}$، $\mathbf{z_{ij}}$ مقدار مشخصه نرمال، و $\boldsymbol{\omega_1}$ و $\boldsymbol{\omega_2}$ به ترتیب مقادیر سود و هزینه می‌باشند. حال اگر $\mathbf{z} = (\mathbf{z_{ij}})_{\mathbf{n \times m}}$ ماتریس تصمیم نرمالایز شده و $\mathbf{w} = (\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_m})^{\mathbf{t}}$بردار نرمالایز شده وزن‌ها باشد:

$$\mathbf{e^t w = 1}$$

که $\mathbf{e^t} = (\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1})$ برداری است که تمام اعضای آن یک است**[6]**. طبق روش مجموع ساده وزین مناسب‌ترین گزینه بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d_i = \sum_{j=1}^{m} z_{ij} w_j, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

که $\mathbf{d_i}$ یک تابع خطی از متغیرهای وزن $\mathbf{w_j (j = 1, \ldots, m)}$ است. مقدار بزرگتر $\mathbf{d_i}$آلترناتیو (گزینه) $\mathbf{ai}$ بهتری می‌دهد. بهترین گزینه آن گزینه‌ای است که درمجموع بیشترین مقدار ارزیابی وزنی را داشته باشد. بطور خلاصه، معادله ۴ می‌تواند به شکل برداری بصورت زیر بیان شود:

$$\mathbf{d = zw} \tag{5}$$

که $\mathbf{d} = (\mathbf{d_1}, \ldots, \mathbf{d_n})^{\mathbf{t}}$بردار کلی مقادیر ارزیابی وزنی برای تمام گزینه‌ها است**[7]**.

۲. ۲. روش بردار ویژه برای مدلسازی روابط اولویت‌های ذهنی

۱. ۲. ۲. روش بردار ویژه برای مدلسازی مقایسات زوجی

برای استفاده از روش مجموع ساده وزین نیاز به معلوم بودن بردار وزن $\mathbf{w} = (\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_m})^{\mathbf{t}}$ داریم. معمولا این بردار می‌تواند به صورت عینی یا ذهنی برآورد شود. روش‌های عینی همچون روش آنتروپی نسبی، روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی، تحلیل مولفه‌های اساسی، و تحلیل عاملی، وزن معیارها را با استفاده از اطلاعات ماتریس تصمیم‌گیری تعیین می‌کنند، اما اولویت‌های تصمیم‌گیرنده را در اهمیت نسبی معیارها در نظر نمی‌گیرند. وزن‌های برآورد شده در این روش در برخی مواقع ممکن است متضاد باشند. بنابراین، روش‌های ذهنی به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند تا اولویت‌های تصمیم گیرنده بتواند در تعیین وزن معیارها درنظر گرفته شود**[8]**. پرکاربردترین روش ذهنی، روش ماتریس مقایسات زوجی وزن‌های نسبی معیارهاست. فرض کنیم رابطه اولویت‌های ضربی وزن‌های نسبی معیارها به صورت زیر باشد:

$$A = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \end{array}, \quad (6)$$

که $\mathbf{a_{ji}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a_{ij}>0}}$ و $\mathbf{a_{ii}} = \mathbf{1}(\mathbf{i}, \mathbf{j} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{m})$ است. بر اساس روش بردار ویژه ساعتی، بردار وزنی $\mathbf{w} = (\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_m})^{\mathbf{t}}$ می‌تواند با حل مساله مقدار ویژه ذیل برآورد شود:

$$(7) \quad \mathbf{aw} = \lambda_{\mathbf{max}} \mathbf{w}$$

اگر رابطه اولویت ضربی **a**، یک ماتریس مقایسه سازگار و دقیق از وزن‌های نسبی معیارها باشد، رابطه‌ی ۷ می‌تواند به صورت زیر ساده شود:

$$(8) \quad \mathbf{aw} = \mathbf{mw}$$

انتظار می‌رود رابطه اولویت ضربی ارایه شده توسط تصمیم‌گیرنده تا حد ممکن سازگار باشد**[9]**.

۲. ۲. ۲. روش بردار ویژه برای مدلسازی اولویت‌های فازی

در بعضی از موقعیت‌ها، ممکن است تصمیم گیرنده ترجیح دهد تا یک رابطه اولویت فازی از آلترناتیوها یا همان گزینه‌های تصمیم ارایه دهد. این مهم، در گذشته به صورت اساسی مورد بررسی قرار گرفته است. فرض کنید ماتریس اولویت‌های فازی مربوط به گزینه‌های تصمیم که توسط تصمیم گیرنده ارایه شده به صورت زیر باشد:

$$P = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \quad (9)$$

و داشته باشیم $\mathbf{p_{ij}} + \mathbf{p_{ji}} = \mathbf{1}$، $\mathbf{p_{ii}} = \mathbf{0/5}$ و $\mathbf{p_{ij}} \geq \mathbf{0}$ (**i,j=1,...,n**). بر طبق منابع [۳و۵و۶]، ربطه اولویت‌های فازی **p** می‌تواند بصورت یک تخمین ذهنی از ماتریس مقایسه زوجی زیر دیده شود:

$$\bar{P} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} & \cdots & \bar{p}_{1n} \\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22} & \cdots & \bar{p}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{p}_{n1} & \bar{p}_{n2} & \cdots & \bar{p}_{nn} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{d_1+d_1} & \frac{d_1}{d_1+d_2} & \cdots & \frac{d_1}{d_1+d_n} \\ \frac{d_2}{d_2+d_1} & \frac{d_2}{d_2+d_2} & \cdots & \frac{d_2}{d_2+d_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d_n}{d_n+d_1} & \frac{d_n}{d_n+d_2} & \cdots & \frac{d_n}{d_n+d_n} \end{bmatrix} \quad (10)$$

که $\mathbf{d_i}$ مقدار ارزیابی وزنی کلی گزینه $\mathbf{a_i}$ است که از طریق رابطه ۴ بدست آمده است. به لحاظ نظری، سیستم معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{d_1}{d_1+d_2}(d_1+d_2)+\frac{d_1}{d_1+d_3}(d_1+d_3)+\cdots+\frac{d_1}{d_1+d_n}(d_1+d_n)=(n-1)d_1, \\ \frac{d_2}{d_2+d_1}(d_2+d_1)+\frac{d_2}{d_2+d_3}(d_2+d_3)+\cdots+\frac{d_2}{d_2+d_n}(d_2+d_n)=(n-1)d_2, \\ \vdots \\ \frac{d_n}{d_n+d_1}(d_n+d_1)+\frac{d_n}{d_n+d_2}(d_n+d_2)+\cdots+\frac{d_n}{d_n+d_{n-1}}(d_n+d_{n-1})=(n-1)d_n \end{cases}$$

(11)

اگر ماتریس اولویت فازی $\mathbf{p}=(\mathbf{p_{ij}})_{\mathbf{n\times n}}$ تخمین دقیقی برای $\overline{\mathbf{p}}=(\overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{ij}})_{\mathbf{n\times n}}$ در رابطه ۱۰ باشد، پس رابطه ۱۱ می‌تواند بصورت زیر درآید:

$$\begin{cases} p_{12}(d_1+d_2)+p_{13}(d_1+d_3)+\cdots+p_{1n}(d_1+d_n)=(n-1)d_1, \\ p_{21}(d_2+d_1)+p_{23}(d_2+d_3)+\cdots+p_{2n}(d_2+d_n)=(n-1)d_2, \\ \vdots \\ p_{n1}(d_n+d_1)+p_{n2}(d_n+d_2)+\cdots+p_{n,n-1}(d_n+d_{n-1})=(n-1)d_n. \end{cases}$$

(12)

یا بصورت:

$$\begin{cases} (\sum_{j\neq 1} p_{1j})d_1+p_{12}d_2+\cdots+p_{1n}d_n,=(n-1)d_1, \\ p_{21}d_1+(\sum_{j\neq 2} p_{2j})d_2+\cdots+p_{2n}d_n=(n-1)d_2, \\ \vdots \\ p_{n1}d_1++p_{n2}d_2+\cdots+(\sum_{j\neq n} p_{nj})d_n=(n-1)d_n. \end{cases}$$ **(13)**

که اگر فرض کنیم $\mathbf{b}$ بصورت زیر باشد:

$$B=\begin{bmatrix} \sum_{j=2}^{n} p_{1j} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \sum_{j=1,j\neq 2}^{n} p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n-1} p_{nj} \end{bmatrix}$$ **(14)**

رابطه ۱۳ می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

bd=(n-1)d (15)

که $\mathbf{d}$ بردار ویژه حقیقی ماتریس $\mathbf{b}$ خواهد بود. ثابت شده است که رابطه ۱۵ برای هر رابطه اولویت فازی صرف نظر از اینکه برآورد دقیقی برای $\overline{\mathbf{p}} = (\overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{ij}})_{\mathbf{n\times n}}$ در رابطه ۱۰ باشد یا خیر، برقرار است. از این روی، رتبه‌بندی ذهنی تصمیم‌گیرنده برای گزینه‌ها، با حل مساله مقدار ویژه (۱۵) می‌تواند بدست آید**[10]**. اگر رابطه ۵ را در رابطه ۱۵ جایگزین کنیم، آنگاه رابطه زیر را بین اولویت‌های فازی و بردار وزن داریم:

bzw=(n-1)zw (16)

۳. روش‌هایی برای ترکیب اولویت‌های ذهنی و اطلاعات عینی

۱. ۳. روش عمومی

بدون از دست دادن کلیت روش، فرض می‌کنیم که تصمیم‌گیرنده هم اطلاعات اولویت‌فازی گزینه‌هاس تصمیم و هم اطلاعات اولویت ضربی (همان مقایسات زوجی) مربوط به وزن معیارها را در قالب یک مدل ترکیبی ارایه دهد. هرچند ارایه هر دوی آنها برای تصمیم گیرنده ضروری نیست. از آنجا که هیچ تضمینی وجود ندارد که اولویت‌های فازی و ضربی بتوانند منجر به برآورد مشابهی برای وزن‌های مربوط به معیارها شوند، برقراری همزمان روابط ۸ و۱۶ بطور کلی دشوار است (یادداشت مترجم: منظور این است که اگر تصمیم گیرنده بخواهد بطور همزمان هم از اولویت‌های فازی و هم اطلاعات عینی استفاده کند و آنها را با هم ترکیب کند ودر قالب یک مدل جدید درآورد، بطور طبیعی مقداری خطا از ترکیب این دو ماتریس بوجود می‌آید)**[11]**. از این روی، بردارهای انحراف (خطا) زیر را معرفی می‌کنیم:

$$E = AW - mW = (A - mI)W, \quad \mathbf{(17)}$$

$$\Gamma = [BZ - (n-1)Z]W, \quad \mathbf{(18)}$$

که $\mathbf{e} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m)^{\mathbf{t}}$و $\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_n)^{\mathbf{t}}$ و $\mathbf{i}$ یک ماتریس $\mathbf{m*m}$ است که تنها عناصر قطر اصلی آن ۱ و مابقی عناصر آن صفر است. مطلوب‌ترین حالت این است که مقدار مطلق هر متغیر خطا تا حد ممکن کوچک باشد، که مدل بهینه‌سازی بر اساس نرم خطا(هدف این مدل حداقل کردن میزان خطاست) بصورت زیر است:

$$\text{Minimize } J = \left(\alpha \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i|^p + \beta \sum_{j=1}^{m} |\varepsilon_j|^p\right)^{1/p},$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} [BZ-(n-1)Z]W - \Gamma = 0, \\ (A - mI)W - E = 0, \\ e^{\mathrm{T}}W = 1, \\ W \geqslant 0, \end{cases} \quad \mathbf{(19)}$$

که $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}$ و $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}$، ضرایب رضایت بخش بوده که $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}$ است و $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ پارامتر نرم خطاست. زمانیکه $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ (۱۹) باشد تنها ماتریس مقایسه زوجی در محاسبات منظور می‌شود. اگر $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ ماتریس اطلاعات عینی و ماتریس اولویت‌های فازی در مقایسات منظور می‌شوند. اگر $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ هر دو

غیرصفر باشند، هر سه ماتریس در محاسبات منظور می‌شوند. برای مقادیر متفاوت $\mathbf{p}$(۱۹)، مجموعه‌های متفاوتی برای وزن‌های نسبی معیارها حاصل خواهند شد. در ادامه سه نوع حالت خاص از $\mathbf{p}$ ($\mathbf{p} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \infty$) مورد بحث قرار می‌گیرند[12].

۲. ۳. روش نرم حداقل خطای موزون (wldn)

فرض کنیم در رابطه ۱۹، $\mathbf{p} = \mathbf{1}$ باشد، در نتیجه تابع هدف تبدیل به **wldn** می‌شود. برای حل مدل رابطه ۱۹، متغیرهای خطای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\gamma_i^+ = \frac{\gamma_i + |\gamma_i|}{2} \quad \text{and} \quad \gamma_i^- = \frac{-\gamma_i + |\gamma_i|}{2}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

$$\varepsilon_j^+ = \frac{\varepsilon_j + |\varepsilon_j|}{2} \quad \text{and} \quad \varepsilon_j^- = \frac{-\varepsilon_j + |\varepsilon_j|}{2}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{21}$$

پر واضح است که $\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{i}^+$ و $\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{i}^-$ و نیز $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{j}^+$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{j}^-$ همگی متغیرهای غیر منفی هستند و می‌توانند بصورت زیر تعریف شوند:

$$\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{i} = \boldsymbol{\gamma}_\mathbf{i}^+ - \boldsymbol{\gamma}_\mathbf{i}^- \quad \mathbf{i=1,\ldots,n} \quad \mathbf{(22)}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{j} = \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{j}^+ - \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{j}^- \quad \mathbf{j=1,\ldots,m} \quad \mathbf{(23)}$$

که $\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{i}^+ . \boldsymbol{\gamma}_\mathbf{i}^- = \mathbf{0}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{i}^+ . \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{i}^- = \mathbf{0}$. بنابراین مدل قبلی(رابطه ۱۹) به حالت مدل برنامه‌ریزی آرمانی زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimize } J = \alpha \cdot e^{\mathrm{T}}(\Gamma^+ + \Gamma^-) + \beta \cdot e^{\mathrm{T}}(E^+ + E^-),\\
&\text{s.t.} \begin{cases} [BZ - (n-1)Z]W - \Gamma^+ + \Gamma^- = 0, \\ (A - mI)W - E^+ + E^- = 0, \\ e^{\mathrm{T}} W = 1, \\ W, E^+, E^-, \Gamma^+, \Gamma^- \geqslant 0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{24}$$

که $\Gamma^+ = (\gamma_1^+, \ldots, \gamma_n^+)^{\mathrm{T}}, \Gamma^- = (\gamma_1^-, \ldots, \gamma_n^-)^{\mathrm{T}}, E^+ = (\varepsilon_1^+, \ldots, \varepsilon_m^+)^{\mathrm{T}} \text{ and } E^- = (\varepsilon_1^-, \ldots, \varepsilon_m^-)^{\mathrm{T}}$ هستند. این مدل برنامه ریزی آرمانی به مدل **wldn** که می‌تواند با استفاده از نرم‌افزار **lindo** یا **ms excel solver** حل شود، اشاره دارد. فرض کنید $\mathbf{w}^* = (\mathbf{w}^*_\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{w}^*_\mathbf{m})^\mathbf{t}$ برآورد بهینه‌ی وزن با استفاده از رابطه ۲۴ باشد. بر اساس آن، مقدار ارزیابی وزنی کلی هر گزینه می‌تواند با استفاده از رابطه ۴ محاسبه شود و تصمیم‌گیری شود[13].

۳. ۳. روش نرم مربع حداقل خطای موزون (wlsdn)

اگر در رابطه ۱۹، $\mathbf{p} = \mathbf{2}$ باشد، در نتیجه تابع هدف تبدیل به **wlsdn** می‌شود. در نتیجه مدل رابطه ۱۹ بصورت زیر درمی‌آید:

$$\text{Minimize } J' = \alpha \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 + \beta \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^2,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} [BZ-(n-1)Z]W - \Gamma = 0, \\ (A-mI)W - E = 0, \\ e^{\mathrm{T}} W = 1, \\ W \geqslant 0, \end{cases} \quad \textbf{(25)}$$

که تابع هدف می‌تواند بصورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} J' &= \alpha \cdot \Gamma^{\mathrm{T}} \Gamma + \beta \cdot E^{\mathrm{T}} E \\ &= \alpha W^{\mathrm{T}} [BZ-(n-1)Z]^{\mathrm{T}} [BZ-(n-1)Z] W + \beta W^{\mathrm{T}} (A-mI)^{\mathrm{T}} (A-mI) W \\ &= W^{\mathrm{T}} \{\alpha [BZ-(n-1)Z]^{\mathrm{T}} [BZ-(n-1)Z] + \beta (A-mI)^{\mathrm{T}} (A-mI)\} W \\ &= W^{\mathrm{T}} G W, \end{aligned} \quad \textbf{(26)}$$

که $G = \alpha[BZ-(n-1)Z]^{\mathrm{T}}[BZ-(n-1)Z] + \beta(A-mI)^{\mathrm{T}}(A-mI)$. بنابراین رابطه ۲۵ می‌تواند بصورت زیر ساده شود:

$$\text{Minimize } J' = W^{\mathrm{T}} G W, \quad \text{s.t.} \begin{cases} e^{\mathrm{T}} W = 1, \\ W \geqslant 0. \end{cases} \quad \textbf{(27)}$$

در برخی مواقع، رابطه ۲۷ می‌تواند با استفاده از تابع لاگرانژی حل شود:

$$L(W,\lambda) = W^{\mathrm{T}} G W + 2\lambda(e^{\mathrm{T}} W - 1). \quad \textbf{(28)}$$

که حل رابطه ۲۷ به صورت زیر است:

$$W^* = \frac{G^{-1} e}{e^{\mathrm{T}} G^{-1} e} \quad \textbf{(29)}$$

اگر $\mathbf{w}^* \geq \mathbf{0}$، $\mathbf{g}^{-1}$ ماتریس معکوس $\mathbf{g}$ و $\mathbf{e=(1,\ldots,1)^t}$ است. به عبارت دیگر، انها در شرایطی که در رابطه ۲۹، $\mathbf{w}^* \geq \mathbf{0}$ باشد، رابطه ۲۷ می‌تواند با تشکیل تابع لاگرانژ حل شود. یک روش حل کلی‌تر برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی زیر با استفاده از حل‌کننده برنامه‌ریزی درجه دوم در بسته نرم‌افزاری **lindo** به صورت زیر است:

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^{m} w_i + \lambda \quad \textbf{(30)}$$
$$\text{s.t. } GW + \lambda e \geqslant 0 \quad \textbf{(31)}$$
$$e^{\mathrm{T}} W = 1 \quad \textbf{(32)}$$

end (33)

$$\text{QCP } m+2. \quad \textbf{(34)}$$

محدودیت نامساوی ۳۱، شرط مرتبه اول تابع لاگرانژی رابطه ۲۸ با توجه به هر متغیر وزنی $\mathbf{w_i (i=1,\ldots,m)}$ است و روابط ۳۳ و ۳۴ دستورهای مورد نیاز نرم‌افزار **lindo** هستند. با توجه به حل

بهینه برای مدل بالا (روابط ۳۰ تا ۳۴) با استفاده از $\mathbf{w}^* = (\mathbf{w}^*_1, \dots, \mathbf{w}^*_m)^t$، مقدار ارزیابی وزن کلی هر گزینه با استفاده از رابطه ۴ می‌تواند محاسبه شود و تصمیم گیری شود. این روش، **wlsdn** نامیده می‌شود **[14]**.

٤. ٣. روش نرم حداقل حداکثر(مینیماکس) خطای موزون (wmdn)

اگر در رابطه ۱۹، $\mathbf{p} = \infty$ باشد، در نتیجه تابع هدف **wmdn** می‌شود و مدل بصورت زیر درمی‌آید:

$$\text{Minimize } J = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \varepsilon,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} -\gamma \cdot e \leqslant [BZ - (n-1)Z]W \leqslant \gamma \cdot e, \\ -\varepsilon \cdot e \leqslant (A - mI)W \leqslant \varepsilon \cdot e, \\ e^{\mathrm{T}} W = 1, \\ W, \gamma, \varepsilon \geqslant 0, \end{cases} \tag{35}$$

که $\gamma = \max_i |\gamma_i|$ و $\varepsilon = \max_j |\varepsilon_j|$. مدل بالا می‌تواند بصورت زیر نیز نوشته شود:

$$\text{Minimize } J = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \varepsilon,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} [BZ - (n-1)Z]W + \gamma \cdot e \geqslant 0, \\ -[BZ - (n-1)Z]W + \gamma \cdot e \geqslant 0, \\ (A - mI)W + \varepsilon \cdot e \geqslant 0, \\ -(A - mI)W + \varepsilon \cdot e \geqslant 0, \\ e^{\mathrm{T}} W = 1, \\ W, \gamma, \varepsilon \geqslant 0, \end{cases} \tag{36}$$

که مدل فوق یک مدل **lp** است که می‌تواند با استفاده از بسته نرم‌افزار **lindo** یا **ms excel solver** حل شود. فرض کنید $\mathbf{w}^* = (\mathbf{w}^*_1, \dots, \mathbf{w}^*_m)^t$ بردار وزن بهینه‌ی بدست آمده با استفاده از رابطه ۳۶ باشد، بر اساس آن مقدار ارزیابی وزن کلی هر گزینه می‌تواند محاسبه و تصمیم‌گیری انجام شود. این روش، **wmdn** نام دارد **[15]**.

۵. ۳. تعمیم به تصمیم‌گیری گروهی

در تصمیم‌گیری گروهی، ممکن است تصمیم گیرنده های مختلف قادر به ارایه اطلاعات اولویت‌های متفاوت باشند (نظرات متفاوت داشته باشند) زیرا قلمرو دانش و پیشینه تحصیلی آنان متفاوت است. یک مساله تصمیم‌گیری گروهی را در نظر بگیرید که $\mathbf{k_1}$ تصمیم‌گیرنده روابط اولویت فازی $\mathbf{p}^{(\mathbf{k})} = (\mathbf{p}_{\mathbf{ij}}^{(\mathbf{k})})_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ ($\mathbf{k=1,\dots,k_1}$) مربوط به گزینه‌های تصمیم و $\mathbf{k_2}$ تصمیم‌گیرنده روابط مقایسات زوجی $\mathbf{a}^{(\mathbf{l})} = (\mathbf{a}_{\mathbf{ij}}^{(\mathbf{l})})_{\mathbf{m}\times\mathbf{m}}$ ($\mathbf{l=1,\dots,k_2}$) مربوط به اهمیت نسبی وزن معیارهای تصمیم، ارایه می‌دهند. اگر روابط اولویت‌های فازی $\mathbf{a}^{(\mathbf{l})} = (\mathbf{a}_{\mathbf{ij}}^{(\mathbf{l})})_{\mathbf{m}\times\mathbf{m}}$ و روابط اولویت‌های ضربی $\mathbf{p}^{(\mathbf{k})} = (\mathbf{p}_{\mathbf{ij}}^{(\mathbf{k})})_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ بتوانند به ترتیب در قالب رابطه اولویت فازی مشترک $\mathbf{p} = (\mathbf{p_{ij}})_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ و رابطه اولویت ضربی مشترک

$\mathbf{a} = (\mathbf{a_{ij}})_{\mathbf{m\times m}}$ جمع شوند، مدل کلی رابطه ۱۹ می‌تواند بطور مستقیم برای تحلیل تصمیم‌گیری گروهی استفاده شود؛ درغیراینصورت، مدل بهینه‌سازی تعمیم‌یافته‌ی زیر باید مورد استفاده قرار گیرد:

$$\text{Minimize } J = \left\{ \sum_{k=1}^{k_1} \left(\alpha_k \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i^{(k)}|^p \right) + \sum_{l=1}^{k_2} \left(\beta_l \sum_{j=1}^{m} |\varepsilon_j^{(l)}|^p \right) \right\}^{1/p},$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} [B^{(k)}Z - (n-1)Z]W - \Gamma^{(k)} = 0, \quad k = 1, \ldots, k_1, \\ (A^{(l)} - mI)W - E^{(l)} = 0, \quad l = 1, \ldots, k_2, \\ e^{\mathrm{T}}W = 1, \\ W \geqslant 0, \end{cases} \tag{37}$$

که

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} \sum_{j=2}^{n} p_{1j}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \cdots & p_{1n}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & \sum_{j=1, j\neq 2}^{n} p_{2j}^{(k)} & \cdots & p_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1}^{(k)} & p_{n2}^{(k)} & \cdots & \sum_{j=1}^{n-1} p_{nj}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \ldots, k_1, \tag{38}$$

$\Gamma^{(k)} = (\gamma_1^{(k)}, \ldots, \gamma_n^{(k)})^{\mathrm{T}}\ (k = 1, \ldots, k_1)$، $E^{(l)} = (\varepsilon_1^{(l)}, \ldots, \varepsilon_m^{(l)})^{\mathrm{T}}\ (l = 1, \ldots, k_2)$، $\boldsymbol{\alpha_k}$ و $\boldsymbol{\beta_l}$ اهمیت نسبی وزن‌های تصمیم‌گیرنده **k** ام و **l** ام هستند، که در معادله $\sum_{k=1}^{k_1} \alpha_k + \sum_{l=1}^{k_2} \beta_k = 1$، $\boldsymbol{\alpha_k \geq 0}$ برای $\mathbf{k=1,\ldots,k_1}$ و $\boldsymbol{\beta_l \geq 0}$ برای $\mathbf{l=1,\ldots,k_2}$ صدق می‌کنند. برای پارامتر مشخص **p** اگر **p=1,2,∞**باشد، مدل رابطه‌ی ۳۷ هم می‌تواند به صورت مدل **lp** و هم مدل برنامه‌ریزی درجه دوم حل شود**[16]**.

٦. ٣. انتخاب پارامترها

هر دو مدل ۱۹ و ۳۷ دربرگیرنده چندین پارامتر همچون **p**، **α** و **β** هستند. به لحاظ نظری، **p** می‌تواند هر مقدار مثبتی باشد و مقدار بهینه نیز می‌تواند با کمینه‌سازی تابع هدف هنگامیکه پارامترهای **α** و **β** معلوم هستند، تعیین شود. هر چند، پیچیدگی محاسباتی مدل‌ها بطور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. از سوی دیگر، مقدار **p** بهینه بدست آمده از این روش، تنها در مورد فوق قابل قبول است و قابلیت تعمیم ندارد. بنابراین، یک راه بسیار سودمند قرار دادن مقدار **p** برابر **1,2,∞**است. برای **p=1,∞**، مدل‌های ۱۹ و ۳۷، بصورت مدل‌های برنامه ریزی خطی ساده می‌شوند. برای **p=2**، مدل‌ها به صورت مدل برنامه‌ریزی درجه دوم در می‌آیند**[17]**. با توجه به نظریه برنامه ریزی خطی، در یک مدل برنامه ریزی خطی جهت یافتن فاصله یا فرجه‌ی هر ضریب تابع هدف می‌توانیم همیشه از تحلیل حساسیت استفاده کنیم و هنگامی که ضرایب تابع هدف در این فاصله تغییر می‌یابند، حل بهینه مدل برنامه ریزی خطی بدون تغییر باقی می‌ماند. بنابراین، زمانیکه **p=1,∞** باشد، مدل برنامه ریزی خطی متناظر، برای تغییر **α** و **β** نسبتا قوی خواهد بود. به

عبارت دیگر، اگر **p=2** باشد، مدل برنامه ریزی درجه دوم مربوطه، به تغییر **α** و **β** بیشتر حساس خواهد بود. از این روی، اگر تصمیم گیرنده انتظار نتیجه تصمیم قوی داشته باشد، باید مقدار **p=1,∞** را انتخاب کند؛ در غیراینصورت، می‌تواند مقدار **p=2** را انتخاب کند. اگر در انتخاب مقدار مناسب **p** احساس مشکل کنند، پیشنهاد شده است که **p=1,2,∞** همگی بهترین حالت برای تصمیم‌گیری نهایی هستند. **α** و **β** پارامترهای وزن بوده و برای افزایش انعطاف‌پذیری مدل‌ها طراحی شده‌اند تا به خوبی بتوانند ترجیحات متفاوت تصمیم گیرنده را بازتاب دهند. اگر تصمیم گیرنده قادر به ارایه ماتریس روابط ضربی (ماتریس اطلاعات عینی) وزن‌های معیارها نباشد یا تمایلی نسبت به آن نداشته باشد، یا نخواهد آن را در نظر بگیرد، آنگاه می‌تواند $\alpha = 1$ و $\beta = 0$ قرار دهد**[18]**. در این صورت، مدل ۱۹ تبدیل به حالت زیر می‌شود:

$$\text{Minimize } J = \left(\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i|^p\right)^{1/p},$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} [BZ - (n-1)Z]W - \Gamma = 0, \\ e^{\mathrm{T}} W = 1, \\ W \geqslant 0, \end{cases}$$

(39)

که تعمیم **ldm-1** برای ترکیب روابط اولویت فازی ذهنی و اطلاعات ماتریس تصمیم عینی است. در مقابل، اگر تصمیم گیرنده قادر به ارایه ماتریس روابط فازی مربوط به گزینه‌های تصمیم نباشد یا ترجیح دهد آن را در نظر نگیرد، در این صورت می‌تواند مقدار **α** را برابر صفر و **β** را برابر ۱ قرار دهد. در نتیجه، مدل ۱۹ می‌تواند به صورت ذیل نوشته شود:

$$\text{Minimize } J = \left(\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|^p\right)^{1/p},$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} (A - mI)W - E = 0, \\ e^{\mathrm{T}} W = 1, \\ W \geqslant 0, \end{cases}$$

(40)

که یک مدل تعمیم‌یافته جدید برای اولویت‌های بدست آمده از ماتریس مقایسات زوجی است. برای **p=1**، تبدیل به یک مدل برنامه ریزی آرمانی برای محاسبه اولویت‌ها از ماتریس مقایسات زوجی می‌شود.

$$\text{Minimize } J = \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} (A - mI)W - E = 0, \\ e^{\mathrm{T}} W = 1, \\ W \geqslant 0. \end{cases}$$

(41)

برای **p=2**، مدل ۴۰ تبدیل به مدل برنامه ریزی درجه دوم زیر می‌شود:

$$\text{Minimize } J = W^{\mathrm{T}}[(A - mI)^{\mathrm{T}}(A - mI)]W,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} e^{\mathrm{T}} W = 1, \\ W \geqslant 0. \end{cases}$$

(42)

برای **p=∞**، مدل ۴۰ تبدیل به مدل برنامه ریزی خطی مینیماکس می‌شود:

$$\text{Minimize } J=\delta,\quad \text{s.t.}\begin{cases}-\delta\cdot e\leqslant(A-mI)W\leqslant\delta\cdot e,\\ e^{\mathrm{T}}W=1,\\ W,\delta\geqslant 0,\end{cases}\tag{43}$$

که $\delta=\max_j|\varepsilon_j|$ است. بطور معمول، ممکن است تصمیم گیرنده بخواهد هم روابط اولویت فازی مربوط به گزینه‌ها و هم روابط اولویت ضربی مربوط به وزن‌های معیارها را در نظر گیرد. در این حالت، او می‌تواند اهیمت نسبی متفاوتی را به هر یک از روابط خود ضمیمه کند. برای مثال، می‌تواند از مقیاس معروف ۱ تا ۹ فرآیند تحلیل سلسله مراتبی برای تعیین مقادیر $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ استفاده کند. اگر تصور می‌شود روابط اولویت فازی نسبت به روابط اولویت ضربی به یک اندازه مهم هستند، پس $\boldsymbol{\alpha=\beta=1/2}$ می‌شود. اگر تصور می‌شود اولی (روابط اولویت فازی) نسبتا مهم‌تر از دومی (روابط اولویت ضربی) است، پس $\boldsymbol{\alpha=3\beta}$ قرار می‌دهد. اگر تصور می‌شود روابط اولویت فازی به شدت مهم‌تر از روابط اولویت ضربی است، پس $\boldsymbol{\alpha=5\beta}$ قرار داده می‌شود. اگر اولی نسبت به دومی بسیار قویاً مهم است، پس تصمیم گیرنده مقدار $\boldsymbol{\alpha=7\beta}$ قرار می‌دهد. اگر اولی بی‌نهایت مهم‌تر از دومی است، تصمیم گیرنده مقدار $\boldsymbol{\alpha=9\beta}$ قرار می‌دهد. پیشنهاد شده است که تصمیم گیرنده باید بیش از یک مجموعه از مقادیر را برای تحلیل حساسیت آزمون کند تا اینکه نتیجه معتبری از تصمیم به دست آید. پارامترهای $\boldsymbol{\alpha_k}$ و $\boldsymbol{b_l}$ در مدل ۳۷ طراحی شده‌اند تا اهمیت نسبی تصمیم گیرنده های متفاوت را در تصمیم‌گیری گروهی بازتاب دهند. این پارامترها بر اساس عواملی چون قلمروی دانش تصمیم گیرنده، جایگاه‌ها در تصمیم‌گیری گروهی، و تجربه تعیین می‌شوند. اگر شواهد قابل توجهی برای نشان دادن نابرابری نسبی بین تصمیم‌گیرندگان در تصمیم‌گیری گروهی وجود نداشته باشد، $\boldsymbol{\alpha_k}$ و $\boldsymbol{b_l}$ می‌توانند برابر باشند**[19]**.

٤. مثال عددی

در این بخش، یک مثال عددی ارایه می‌دهیم تا نشان دهیم چگونه روابط اولویت‌های فازی گزینه‌ها و روابط اولویت ضربی معیارهای تصمیم گیرنده می‌تواند با اطلاعات ماتریس تصمیم‌گیری عینی ادغام شود و تصمیم‌گیری انجام شود. این مثال بر اساس کار منتشر شده از فن و همکاران است. یک خریدار(تصمیم گیرنده) قصد دارد خانه‌ای بخرد. ۴ گزینه برای انتخاب از $\boldsymbol{a_1}$ تا $\boldsymbol{a_4}$ دارد. شاخص‌ها یا معیارهای او نیز عبارتند از : $\boldsymbol{g_1}$ قیمت خانه به دلار، $\boldsymbol{g_2}$ اندازه خانه به مترمربع، $\boldsymbol{g_3}$ فاصله تا محل کار به کیلومتر و $\boldsymbol{g_4}$ ویژگی‌های محیطی خانه مثل چشم‌انداز و. . . می‌باشد. شاخص‌های اول و سوم معیارهای هزینه و شاخص‌های دوم و چهارم معیارهای سود هستند. ماتریس تصمیم برای این مساله تصمیم گیری چند شاخصه به صورت زیر است:

$$X = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} G_1 & G_2 & G_3 & G_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3.0 & 100 & 10 & 7 \\ 2.5 & 80 & 8 & 5 \\ 1.8 & 50 & 20 & 11 \\ 2.2 & 70 & 12 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

روابط اولویت‌های فازی و ضربی برای تصمیم گیرنده به صورت زیر است:

$$P = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 0.44 & 0.64 & 0.54 \\ 0.56 & - & 0.69 & 0.60 \\ 0.36 & 0.31 & - & 0.40 \\ 0.46 & 0.40 & 0.60 & - \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{and} \quad A = \begin{array}{c} \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} G_1 & G_2 & G_3 & G_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مطلوب است مشخص کردن اولویت ۴ خانه برای خریدار؟ ابتدا ماتریس تصمیم گیری $\mathbf{x}$ را به روش فازی (روابط ۱ و ۲) نرمالایز می‌کنیم تا ماتریس $\mathbf{z}$ زیر بدست آید.

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5/6 & 1/3 \\ 5/12 & 3/5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 2/5 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

ماتریس $\mathbf{b}$ هم مطابق آنچه از قبل گفته شده بود از ماتریس اولویت‌های فازی $\mathbf{p}$ (رابطه‌ی ۱۵) بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$B = \begin{bmatrix} 1.62 & 0.44 & 0.64 & 0.54 \\ 0.56 & 1.85 & 0.69 & 0.60 \\ 0.36 & 0.31 & 1.07 & 0.40 \\ 0.46 & 0.40 & 0.60 & 1.46. \end{bmatrix}$$

حداکثر مقدار ویژه‌ی آن $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{max}} = \mathbf{3}$ است و مقدار ویژه‌ی اصلی نرمالایز شده از رابطه ۱۴ مطابق زیر بدست می‌آید:

$$D = (d_1, d_2, d_3, d_4)^{\mathrm{T}} = (0.2713, 0.3446, 0.1537, 0.2304)^{\mathrm{T}}$$

که ۴ گزینه را مطابق $\mathbf{a_2} > \mathbf{a_1} > \mathbf{a_4} > \mathbf{a_3}$ رتبه‌بندی می‌کند، که نماد ">" به مفهوم ارجحیت یا برتری داشتن است. این رتبه‌بندی اولویت ذهنی تصمیم گیرنده است و بطور ذهنی $\mathbf{a_2}$ بهترین گزینه است. هر چند، این رتبه‌بندی اولویت ذهنی ممکن است تحقق پیدا نکند (قابل درک نباشد) زیرا هم اطلاعات ماتریس تصمیم‌گیری و هم روابط اولویت وزنی هنوز درنظر گرفته نشده‌اند. برای رابطه اولویت ضربی $\mathbf{a}$، بردارهای اولویت زیر برای $\mathbf{p=1,2,\infty}$ می‌تواند با استفاده از مدل ۴۰ یا مدل‌های معادل آن (۴۱ تا ۴۳) حاصل شود:

$$W = (0.2778, 0.4692, 0.1603, 0.0928)^{\mathrm{T}} \text{ for } p = 1,$$
$$W = (0.2775, 0.4691, 0.1594, 0.0936)^{\mathrm{T}} \text{ for } p = 2,$$
$$W = (0.2772, 0.4686, 0.1595, 0.0946)^{\mathrm{T}} \text{ for } p = \infty,$$

که همگی آنها کاملا نزدیک به وزن‌های بردار ویژه $\mathbf{w}^* = (0.2772, 0.4673, 0.1601, 0.0954)^{\mathbf{t}}$ با $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{max}} = \mathbf{4.0310}$ هستند و $\mathbf{cr} = \mathbf{0.011} < \mathbf{0.1}$ است که از روش روش بردار ویژه ساعتی حاصل شده است. این نشان می‌دهد که مدل تعمیم‌یافته‌ی (۴۰) گزینه‌ی خوبی برای بدست آوردن اولویت‌ها از ماتریس مقایسات زوجی است. چهار بردار اولویت بالا از معیارها منجر به چهار مجموعه‌ی از مقادیر ارزیابی موزون کلی برای چهار گزینه با استفاده از روابط ۴ و ۵ می‌شود، که به صورت زیر نشان داده شده‌اند:

$D = (0.6336, 0.5575, 0.3706, 0.5416)^{\mathrm{T}}$ by the W for $p = 1$,
$D = (0.6333, 0.5566, 0.3714, 0.5416)^{\mathrm{T}}$ by the W for $p = 2$,
$D = (0.6331, 0.5562, 0.3718, 0.5417)^{\mathrm{T}}$ by the W for $p = \infty$,
$D = (0.6325, 0.5560, 0.3726, 0.5421)^{\mathrm{T}}$ by the EM weights.

جدول ۱- وزن‌های نسبی بهینه برای چهار معیار با استفاده از روش wldn

α	β	w_1	w_2	w_3	w_4
1.0	0	0.3413	0.3152	0.3435	0
0.8	0.2	0.2723	0.4643	0.2051	0.0582
0.6	0.4	0.2728	0.4692	0.1603	0.0928
0.5	0.5	0.2728	0.4692	0.1603	0.0928
0.4	0.6	0.2728	0.4692	0.1603	0.0928
0.2	0.8	0.2728	0.4692	0.1603	0.0928
0	1.0	0.2778	0.4692	0.1603	0.0928

جدول ۲- مقادیر ارزیابی وزین کلی برای چهار گزینه و رتبه‌بندی با استفاده از روش wldn

α	β	A_1	A_2	A_3	A_4	Ranking
1.0	0	0.6014	0.6748	0.3413	0.5826	$A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$
0.8	0.2	0.6547	0.5972	0.3305	0.5429	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.6	0.4	0.6336	0.5575	0.3706	0.5416	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.5	0.5	0.6336	0.5575	0.3706	0.5416	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.4	0.6	0.6336	0.5575	0.3706	0.5416	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.2	0.8	0.6336	0.5575	0.3706	0.5416	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0	1.0	0.6336	0.5575	0.3706	0.5416	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$

جدول ۳- وزن‌های نسبی بهینه برای چهار معیار با استفاده از روش wlsdn

α	β	w_1	w_2	w_3	w_4
1.0	0	0.3263	0.2965	0.3773	0
0.8	0.2	0.2820	0.4630	0.1955	0.0594
0.6	0.4	0.2751	0.4692	0.1782	0.0775
0.5	0.5	0.2747	0.4699	0.1732	0.0821
0.4	0.6	0.2750	0.4701	0.1694	0.0856
0.2	0.8	0.2761	0.4697	0.1636	0.0905
0	1.0	0.2775	0.4691	0.1594	0.0939

چهار مجموعه از مقادیر ارزیابی همگی با هم، چهار گزینه را به صورت $\mathbf{a_1} > \mathbf{a_2} > \mathbf{a_4} > \mathbf{a_3}$ رتبه‌بندی می‌کنند. این رتبه‌بندی از روابط اولویت ضربی و اطلاعات ماتریس عینی تصمیم بدست آمده اما روابط اولویت فازی تصمیم گیرنده هنوز درنظر گرفته نشده‌اند. پس این رتبه‌بندی هنوز رتبه‌بندی نهایی نیست. برای تعیین رتبه‌بندی نهایی چهار گزینه، هم روابط اولویت فازی و هم ضربی و هم اطلاعات ماتریس تصمیم‌گیری باید بصورت همزمان در نظر گرفته شوند. این مهم با حل مدل (۱۹) یا مدل‌های معادل آن (۲۴ و ۲۵) و (۳۵) برای **p=1,2,∞** می‌تواند انجام شود. برای ترکیب‌های متفاوت اطلاعات عینی و اولویت‌های ضربی، جدول ۱ تا ۶ وزن‌های نسبی بهینه برآورد شده و مقادیر ارزیابی وزن کلی برای چهار معیارو نیز رتبه‌بندی نهایی بدست آمده از روش‌های مختلف برای **p=1,2,∞** را نشان می‌دهد. از آنجا که $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ و $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$ نشان‌دهنده‌ی دو ترکیب خیلی زیاد هستند، که هیچیک روابط اولویت فازی یا روابط اولویت ضربی را در نظر نمی‌گیرند، زمانی که دو رابطه‌ی اولویت باید بصورت همزمان درنظر گرفته شوند، باید از آنها اجتناب شود. در این حالت، مهم نیست که چگونه $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ ترکیب می‌شوند، سه روش **wldn**، **wlsdn** و **wmdn** همگی رتبه‌بندی مشابه $\mathbf{a_1} > \mathbf{a_2} > \mathbf{a_4} > \mathbf{a_3}$ را ارایه می‌دهند. بنابراین $\mathbf{a_1}$ بهترین انتخاب برای تصمیم گیرنده است. همچنین ملاحظه شده است که وزن‌های بدست آمده از روش **wlsdn** بیشترین حساسیت را به تغییر مقادیر $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ نسبت به روش‌های **wldn** و **wmdn** دارند. این مشاهده، نتایج ما را در بخش ۳. ۶ مبنی بر اینکه مدل (۱۹) با **p=1** یا∞ نسبت به تغییر $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$قوی‌تر از **p=2** است را تایید می‌کند.

جدول ٤- مقادیر ارزیابی وزن کلی چهار گزینه و رتبه‌بندی آنها با استفاده از روش wlsdn

α	β	A_1	A_2	A_3	A_4	Ranking
1.0	0	0.6108	0.6911	0.3263	0.5876	$A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$
0.8	0.2	0.6458	0.5909	0.3415	0.5432	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.6	0.4	0.6435	0.5743	0.3526	0.5415	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.5	0.5	0.6416	0.5696	0.3569	0.5414	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.4	0.6	0.6397	0.5660	0.3606	0.5413	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.2	0.8	0.6363	0.5605	0.3666	0.5415	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0	1.0	0.6333	0.5566	0.3714	0.5416	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$

جدول ٥- وزن‌های نسبی بهینه برای چهار معیار با استفاده از روش wmdn

α	β	w_1	w_2	w_3	w_4
1.0	0	0.3263	0.2965	0.3773	0
0.8	0.2	0.2928	0.4943	0.2129	0
0.6	0.4	0.2772	0.4686	0.1595	0.0946
0.5	0.5	0.2772	0.4686	0.1595	0.0946
0.4	0.6	0.2772	0.4686	0.1595	0.0946
0.2	0.8	0.2772	0.4686	0.1595	0.0946
0	1.0	0.2772	0.4686	0.1595	0.0946

جدول ۶- مقادیر ارزیابی وزن کلی چهار گزینه و رتبه‌بندی آنها با استفاده از روش wmdn

α	β	A_1	A_2	A_3	A_4	Ranking
1.0	0	0.6592	0.6802	0.2856	0.5645	$A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$
0.8	0.2	0.6717	0.6315	0.2928	0.5349	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.6	0.4	0.6331	0.5562	0.3718	0.5417	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.5	0.5	0.6331	0.5562	0.3718	0.5417	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.4	0.6	0.6331	0.5562	0.3718	0.5417	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0.2	0.8	0.6331	0.5562	0.3718	0.5417	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
0	1.0	0.6331	0.5562	0.3718	0.5417	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$

در نهایت، دریافتیم که مثال مورد بررسی در این قسمت برای زوجی که می‌خواهند خانه یا چیز دیگری بخرند، زمانی که یکی روابط اولویت فازی و دیگری روابط اولویت ضربی ارایه می‌دهد، قابل کاربرد است. تصمیم نهایی هم بر اساس روابط اولویت‌ها و هم اطلاعات ماتریس عینی تصمیم است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش کلی تصمیم گیری چند شاخصه برای ترکیب اولویت‌های ذهنی و اطلاعات ماتریس عینی تصمیم ارایه شد تا تصمیم بر مبنای این رویکرد ترکیبی اتخاذ شود. سه حالت خاص از این روش بررسی شدند. تعمیم این روش به تصمیم‌گیری گروهی و انتخاب پارامترهای تصمیم نیز بررسی شد. یک مثال عددی برای نشان دادن کاربرد روش‌های تصمیم گیری چند شاخصه پیشنهادی بررسی شد. از آنجا که این روش‌ها، هم روابط اولویت‌های فازی و هم ضربی را به صورت همزمان در نظر می‌گیرد، هر روشی که تنها یکی از آنها را در نظر گیرد، می‌تواند به عنوان حالتی خاص از روش‌های ما دیده شود.

فهرست منابع و مآخذ

[1] f. chiclana, f. herrera, e. herrera-viedma, integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision-making based on fuzzy preference relations, fuzzy sets and systems 97 (1998) 33–48.

[2] f. chiclana, f. herrera, e. herrera-viedma, integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations, fuzzy sets and systems 122 (2001) 277–291.

[3] z. p. fan, g. f. hu, s. h. xiao, a method for multiple attribute decision-making with the fuzzy preference relation on alternatives, comput. indus. eng. 46 (2004) 321–327.

[4] z. p. fan, j. ma, y. p. jiang, y. h. sun, l. ma, a goal programming approach to group decision making based on multiplicative preference relations and fuzzy preference relations, European j. oper. res. (in press).

[5] z. p. fan, j. ma, q. zhang, an approach to multiple attribute decision-making based on fuzzy preference information on alternatives, fuzzy sets and systems 131 (2002) 101–106.

[6] z. p. fan, s. h. xiao, g. f. hu, an optimization method for integrating two kinds of preference information in group decision-making, comput. indust. eng. 46 (2004) 329–335.

[7] f. herrera, e. herrera-viedma, f. chiclana, multiperson decision-making based on multiplicative preference relations, european j. oper. res. 129 (2001) 372–385.

[8] c. l. huang, k. yoon, multiple attribute decision-making: methods and applications, springer, berlin, 1981.

[9] s. lipovetsky, w. m. conklin, robust estimation of priorities in the ahp, european j. oper. res. 137 (2002) 110–122.

[10] j. ma, z. p. fan, l. h. huang, a subjective and objective integrated approach to determine attribute weights, european j. oper. res. 112 (1999) 397–404.

[11] t. l. saaty, the analytic hierarchy process, mcgraw-hill, new york, 1980.

[12] y. m. wang, on fuzzy multiattribute decision-making models and methods with incomplete preference information, fuzzy sets and systems 151 (2005) 285–301.

[13] y. m. wang, g. w. fu, using the factor analysis method to make decision for multiple attributes, j. decision-making decision support systems 2 (4) (1992) 71–79.

[14] y. m. wang, g. w. fu, a new method of determining the weight coefficients among multiple attributes, j. tsinghua univ. 33 (6) (1993) 97–102.

[15] y. m. wang, g. w. fu, using multiobjective decision-making method to make decision for multiple attributes, control and decision 8 (1) (1993) 25–29.

[16] y. m. wang, g. w. fu, using nonlinear programming method to make decision for multiattributes, j. decision-making decision support systems 3 (1) (1993) 54–61.
[17] y. m. wang, g. w. fu, application of principal components in multiattribute decision making, systems eng. -theory methodol. appl. 2 (2) (1993) 42–48.
[18] y. m. wang, c. parkan, multiple attribute decision-making based on fuzzy preference information on alternatives: ranking and weighting, fuzzy sets and systems 153 (2005) 331 346.
[19] x. xu, a note on the subjective and objective integrated approach to determine attribute weights, european j. oper. res. 156 (2004) 530–532.